Title	多項式の複素巾の積分が満たすある差分微分方程式系(微分方程式の超局所解析)
Author(s)	野海, 正俊
Citation	数理解析研究所講究録 (1981), 431: 178-191
Issue Date	1981-06
URL	http://hdl.handle.net/2433/102676
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
431巻 1981年 178-191

多項式の複素巾の積分が満たすある差分微分方程式系

上智大 理工　野海正俊

0. $f=f(t,x)$ をパラメータ t を含む x の多項式とし，その複素巾 f^λ の積分 $u(\lambda,t)=\int_{C(t)} f(t,x)^\lambda dx$ を考えると，$u(\lambda,t)$ は，積分に対する適当な条件（部分積分及びパラメータに関する積分記号下の微分が許されること）の下で，λ に関する差分・t に関する微分方程式を満たす。（差分微分方程式の一般的な存在証明が，I. N. Bernstein [1] にある。）ここでは，積分変数一変数の場合に限定して，この種の差分微分方程式の explicit な表示を与える。

$f=x^n+t_1x^{n-1}+\cdots+t_n$ を次数 n の一般の多項式とする。この f に対する差分微分方程式を連立系で表示することにすると，基底として例えば

$$u_1(\lambda)=\int f^\lambda dx,\ u_2(\lambda)=\int x f^\lambda dx,\ \ldots,\ u_{n-1}(\lambda)=\int x^{n-2} f^\lambda dx$$

をとることができ，この基底 $\vec{u}(\lambda)={}^t(u_1(\lambda),\ldots,u_{n-1}(\lambda))$ に対して次の様な方程式系が生ずる（$t=(t_1,\ldots,t_n)$ は明示しない）：

$$\vec{u}(\lambda)=A(\lambda)\,\vec{u}(\lambda-1)\quad,\quad D_{t_k}\vec{u}(\lambda)=C^{(k)}(\lambda)\,\vec{u}(\lambda).$$

ここで，$A(\lambda), C^{(k)}(\lambda)$ は，$(h-1)\times(h-1)$ 行列で，その成分は夫々，$\mathbb{Q}(\lambda)[t]$, $\mathbb{Q}(\lambda)[t,\Delta^{-1}]$ に属す。（Δ は f の判別式＝根の差積の平方。）ところが，この $A(\lambda)$, $C^{(k)}(\lambda)$ には，λ の因子が不規則に混入する等不合理な点がある。そこで，この基底を修正してよりよい基底を構成し，その《よい基底》を用いて差分微分方程式系の具体表示を与えることにする。（但し，《よい基底》を今は天下りに構成する。）

1.《よい基底》の構成. まず $f = x^h(1+t_1x^{-1}+\cdots+t_hx^{-h})$ と書いて，（　）内を x^h に対する摂動項と思う。そこで，f の分数巾 $f^{\frac{i}{h}} = x^i(1+t_1x^{-1}+\cdots+t_hx^{-h})^{\frac{i}{h}}$ を考えると，摂動項に対応する部分は $x=\infty$ で正則，全体として i 位の極をもつ $(i=1,\cdots,h-1)$。$f^{\frac{i}{h}}$ を $x=\infty$ で Laurent 展開して

$$f^{\frac{i}{h}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{i-\nu}C(i,\nu)\ ,\quad C(i,\nu)\in\mathbb{Q}[t]$$

と書き，x に関して多項式の部分

$$g_i = \sum_{\nu=0}^{i} x^{i-\nu}C(i,\nu)$$

をとる。これを x で微分して

$$e_i = \frac{1}{i}D_x(g_i) = \sum_{\nu=0}^{i-1}\left(1-\frac{\nu}{i}\right)x^{i-\nu-1}C(i,\nu)$$

とおくと，e_i は，主係数1の $i-1$ 次多項式である。この e_i を用いて

$$u_i(\lambda) = \int e_i f^{\lambda}dx \qquad (i=1,\cdots,h-1)$$

をとり，$e_1,\dots,e_{h-1}$ または $u_1(\lambda),\dots,u_{h-1}(\lambda)$ を《よい基底》と称する。上の $C(i,\nu)$ は，具体的には次の式で与えられる：

$$C(i,\nu)=\sum_{\alpha\in P(\nu)}\frac{i}{h}\left(\frac{i}{h}-1\right)\cdots\left(\frac{i}{h}-|\alpha|+1\right)t^{\alpha}/\alpha!.$$

ここで $P(\nu)$ は ν の分割

$$P(\nu)=\{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_h)\in\mathbb{N}^h;\ \sum_{k=1}^{h}k\alpha_k=\nu\}$$

で，$|\alpha|=\sum_{k=1}^{h}\alpha_k$，$t^{\alpha}/\alpha!=t_1^{\alpha_1}\cdots t_h^{\alpha_h}/\alpha_1!\cdots\alpha_h!$.

<u>2. 差分微分方程式の表示.</u> この《よい基底》を用いると，$\vec{u}(\lambda)={}^t(u_1(\lambda),\dots,u_{h-1}(\lambda))$ について，次の様な差分方程式が生ずる：

$$\text{(A)}\qquad E(\lambda)\vec{u}(\lambda)=\lambda A\vec{u}(\lambda-1).$$

ここで，$E(\lambda)$ は (i,i) 成分が $h\lambda+i$ の対角行列，$A=(a_{ij})$ は，$\mathbb{Q}[t]$ 係数の行列で次の著しい性質をもつ：(A.0) t_k の重みを k と数えるとき，a_{ij} は重み $h+i-j$ の斉重多項式。(A.1) A は，反対角線に関して対称（$J=\begin{pmatrix} 0 & & 1\\ & \ddots & \\ 1 & & 0\end{pmatrix}$ とおくと，AJ が対称）。(A.2) $\det A=(-1)^{[\frac{h}{2}]}\Delta/h$. さらに，上に用いた $C(i,\nu)$ によって A の成分は

$$a_{i,h-j}=\frac{h}{j}\sum_{\nu=1}^{i}\nu C(i,i-\nu)C(j,j+\nu)+\frac{h}{i}\sum_{\nu=1}^{j}\nu C(j,j-\nu)C(i,i+\nu)$$

と表わされる。

$d_t=\sum_{k=1}^{h}dt_k\frac{\partial}{\partial t_k}$ と書いておくと，d_t の $\vec{u}(\lambda)$ への作用は $\vec{u}(\lambda-1)$ によって

$$(B) \qquad d_t \vec{u}(\lambda) = \lambda B \vec{u}(\lambda-1)$$

と表わされ，Bの成分は $\sum_{k=1}^{h} \mathbb{Q}[t]\, dt_k$ の形の微分形式となる。$B=(b_{ij})$ について：(B.1) $b_{ij} = d_t a_{ij} /(h+i-j)$（$b_{ij}$ は a_{ij} を外微分して重みで割ったもの。dt_k の重みも k と数えれば b_{ij} も重み $h+i-j$ で斉重となる。）(B.2) $AB=BA$ なる性質がある。(A.1)(B.1) から Bもまた反対角線に関して対称である。（性質(B.1)(B.2)は，2つの表示式(A)(B)の両立条件として得られる。）

$C=BA^{-1}$ とおけば，(A.2) から，Cは判別式Δに高々1位の極をもつ微分形式の行列で，再び反対角線に関して対称であって，

$$(C) \qquad d_t \vec{u}(\lambda) = C\, E(\lambda)\, \vec{u}(\lambda)$$

の形の微分方程式系が得られる。（$h=3$，$\lambda=-\frac{1}{2}$ の場合が，Gauß の超幾何方程式に対応する。）

行列 B, C は上の手続きでAから計算される。行列Aについては，$C(i,\nu)$を用いた成分の表示を与えたが，このノートの末尾に $h=2,3,4,5$ の場合の具体形を掲げておく。

3. 注釈.（その1）上で構成した《よい基底》は，Saito-Yano-Sekiguchi [3] によって導入された flat coordinate と次の様な関係にあることを，この研究集会の会期中に 矢野環

先生が検証された。$t_1=0$ として, $f=x^{l+1}+t_2x^{l-1}+\cdots+t_{l+1}$ を A_l 型孤立特異点の versal deformation と思う。このとき $t=(t_2,\ldots,t_{l+1})$ 空間の flat coordinate $s=(s_2,\ldots,s_{l+1})$ は,

$$\frac{i}{l+1}s_{i+1}=f^{\frac{i}{l+1}} \text{ の展開の } -1 \text{ 次の係数}$$
$$= c(i,i+1)$$

で定義され, f の係数を $s=(s_2,\ldots,s_{l+1})$ の座標でみたとき

$$e_1=\frac{\partial f}{\partial s_{l+1}},\ e_2=\frac{\partial f}{\partial s_l},\ \ldots,\ e_l=\frac{\partial f}{\partial s_2}$$

なる等式が成立する。(この観点からすれば《よい基底》は《平坦な基底》と呼ぶべきものになっている。) f の分数巾と, flat coordinate との間に, 何故このような奇妙な関係があるのか, 今のところはよくわからない。(Yano [4] も参照。)

(その2) f の複素巾でなく, δ-函数 $\delta(y-f(t,x))$ の積分を考えると; $u_i(\lambda,t)$ と

$$v_i(y,t)=\int e_i\,\delta(y-f)\,dx$$

は, 形式的に Mellin 変換で

$$u_i(\lambda-1)=\int v_i(y,t)\,y^{\lambda-1}dy$$

と対応する。この対応関係によって, n°2 の表示式を, 積分 $\int\delta(y-f)\,dx$ に対する Gauß-Manin の微分方程式系に移しかえることができる。

(その3) n°2 で与えた表示式は, x の平行移動に関する不変性を有している。言い換えると, ベクトル場

$$\mathcal{D}_t = \sum_{k=1}^{h} (h+1-k)\, t_{k-1} \frac{\partial}{\partial t_k} \qquad (t_0 = 1)$$

について，$\mathcal{D}_t A = 0$ となる。 B についても，dt_k を τ_k と書き直して，$\mathcal{D}_\tau$ を上と同じ式で定義するとき，$(\mathcal{D}_t + \mathcal{D}_\tau) B = 0$ となる。（C についても同様。）

4. 以下順に，≪よい基底≫について，n°2 の形の表示が得られることを示していく。その前に，差分微分方程式を引き出す枠組について説明しておく。一般多項式 $f = x^h + t_1 x + \cdots + t_h$ に対して係数環として，h 変数の多項式環 $\mathbb{Q}[t] = \mathbb{Q}[t_1, \cdots, t_h]$ をとる。巾のパラメータは，不定元と考えることにする。そこで，被積分函数の加群として

$$M = \mathbb{Q}(\lambda)[t, x, f^{-1}]\, f^{\lambda}$$

をとる（f^λ は基底を表わす記号と思う）。

$$D_x(g(\lambda) f^\lambda) = D_x(g(\lambda)) f^\lambda + \lambda\, g(\lambda) D_x(f) f^{\lambda-1};\ g(\lambda) \in \mathbb{Q}(\lambda)[t, x, f^{-1}]$$

等の作用で，M は $\mathbb{Q}(\lambda)[t, x, D_t, D_x]$ 上の左加群となる。これに対して，x に関する de Rham 複体

$$\Omega_x^{\cdot}(M):\quad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{d_x} \Omega_x^1 \underset{\mathbb{Q}[x]}{\otimes} M \longrightarrow 0$$

をとる。（$\Omega_x^1 = \mathbb{Q}[x]dx$，$d_x = dx \otimes D_x$.）これに，次のフィルトレーションを入れる：

$$\Omega_x^{\cdot}(M)_m:\quad 0 \longrightarrow M_m \xrightarrow{d_x} \Omega_x^1 \underset{\mathbb{Q}[x]}{\otimes} M_{m+1} \longrightarrow 0$$

ここで $M_m = \mathbb{Q}(\lambda)[t, x] f^{\lambda - m}$ $(m \in \mathbb{Z})$. このとき，

<u>命題</u> i) 各 $m \in \mathbb{Z}$ について，$H^0(\Omega_x^{\cdot}(M)_m) = 0$．また

$$H^1(\Omega_x^{\cdot}(M)_m) \simeq \mathbb{Q}(\lambda)[t,x]^{(h-2)} f^{\lambda-m-1} dx.$$

で，$H^1(\Omega_x^{\cdot}(M)_m)$ は，階数 $h-1$ の自由 $\mathbb{Q}(\lambda)[t]$-加群。

（ここで $\mathbb{Q}(\lambda)[t,x]^{(d)}$ は x について d 次以下の多項式全体。）

ii) 各 $m \in \mathbb{Z}$ について

$$\mathbb{Q}[t,\Delta^{-1}] \otimes_{\mathbb{Q}[t]} H^1(\Omega_x^{\cdot}(M)_m) \simeq \mathbb{Q}[t,\Delta^{-1}] \otimes_{\mathbb{Q}[t]} H^1(\Omega_x^{\cdot}(M)).$$

この命題の証明は古典的と思われるので略す。（Pham [2] の Introduction にある命題と本質的に同じ。） この命題から，$e_1, \dots, e_{h-1} \in \mathbb{Q}[t,x]^{(h-2)}$ を $\mathbb{Q}[t]$-基底となるようにとれば，剰余類，$[e_i f^{\lambda-m-1} dx]$ が，$H^1(\Omega_x^{\cdot}(M)_m)$ の $\mathbb{Q}(\lambda)[t]$-基底を与えることがわかる。このことから

$$\left.\begin{aligned} e_i f^{\lambda} dx &\equiv \sum_{j=1}^{h-1} a_{ij}(\lambda) e_j f^{\lambda-1} dx \\ D_{t_k}(e_i f^{\lambda}) dx &\equiv \sum_{j=1}^{h-1} b_{ij}^{(k)}(\lambda) e_j f^{\lambda-1} dx \end{aligned}\right\} \pmod{d_x M_0}$$

なる $a_{ij}(\lambda)$，$b_{ij}^{(k)}(\lambda) \in \mathbb{Q}(\lambda)[t]$ が一意に定まる。

$$u_i(\lambda-m) = e_i f^{\lambda-m} dx \mod d_x M$$

と書けば，上の2式が

$$u_i(\lambda) = \sum_{j=1}^{h-1} a_{ij}(\lambda) u_j(\lambda-1)$$

$$D_{t_k} u_i(\lambda) = \sum_{j=1}^{h-1} b_{ij}^{(k)}(\lambda) u_j(\lambda-1)$$

なる方程式系を与える訳である。

5. 表示(A)と行列 A の対称性. $n^\circ 1$ の記号を踏襲する。表示(A)を得るためには、各 i で、$he_i f - g_i D_x(f)$ が x について高々 $h-2$ 次であることを言えばよい。そうすれば、

$$(5.1) \qquad he_i f - g_i D_x(f) = \sum_{j=1}^{h-1} a_{ij} e_j \qquad (i=1,\dots,h-1)$$

なる $a_{ij} \in \mathbb{Q}[t]$ が一意に定まる。部分積分により、

$$-g_i D_x(f) f^{\lambda-1} dx \equiv \frac{i}{\lambda} e_i f^{\lambda} dx \pmod{d_x M_0}$$

だから、(5.1) 式から

$$\left(h+\frac{i}{\lambda}\right) e_i f^{\lambda} dx \equiv \sum_{j=1}^{h-1} a_{ij} e_j f^{\lambda-1} dx \pmod{d_x M_0}$$

となる —— これが表示(A)を与える。記号の便宜として

$$\varphi = \sum_{\nu=-\infty}^{N} x^{\nu} c_{\nu}$$

の形の巾級数に対して

$$[\varphi]_+ = \text{多項式部分} = \sum_{\nu\geq 0} x^{\nu} c_{\nu}$$

$$[\varphi]_- = \varphi - [\varphi]_+ = \sum_{\nu<0} x^{\nu} c_{\nu}$$

$$[\varphi]_{\mu} = x^{\mu}\text{の係数} = c_{\mu}$$

と書くことにする。例えば $e_i = \frac{1}{i}\left[D_x(f^{\frac{i}{h}})\right]_+ = \frac{1}{h}\left[D_x(f) f^{\frac{i}{h}-1}\right]_+$.

補題 1. 《よい基底》の e_i $(i=1,\dots,h-1)$ について、$he_i f - g_i D_x(f)$ は高々 $h-2$ 次式。

証明) $he_i f = \left[D_x(f) f^{\frac{i}{h}-1}\right]_+ f = D_x(f) f^{\frac{i}{h}} - \left[D_x(f) f^{\frac{i}{h}-1}\right]_- f$

$g_i D_x(f) = D_x(f)\left[f^{\frac{i}{h}}\right]_+ = D_x(f) f^{\frac{i}{h}} - D_x(f)\left[f^{\frac{i}{h}}\right]_-$

従って、$he_i f - g_i D_x(f) = D_x(f)\left[f^{\frac{i}{h}}\right]_- - \left[D_x(f) f^{\frac{i}{h}-1}\right]_- f$.

ここで，$D_x(f)[f^{\frac{i}{h}}]_-$ は高々 $h-2$ 次。一方 $D_x(f)f^{\frac{i}{h}-1}$ $=\frac{h}{i}D_x(f^{\frac{i}{h}})$ の -1 次の係数は 0 だから，$[D_x(f)f^{\frac{i}{h}-1}]_-\cdot f$ も高々 $h-2$ 次となる。□.

これで 表示(A)が保証された。次に行列 A の対称性を問題にする。そのために，同型 $\mathbb{Q}[t,x]^{(h-2)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}[t,x]/\mathbb{Q}[t,x]D_x(f)$ に注目して，次の記号 $\langle\ \ \rangle$ を導入する。一般の $g\in\mathbb{Q}[t,x]$ を，$g=q\cdot D_x(f)+r$ （$q,r\in\mathbb{Q}[t,x]$，$\deg_x r\leq h-2$）と書いて，$\langle g\rangle = r$ の $h-2$ 次の係数 とおく。（$D_x(f)^{-1}$ を $x=\infty$ で展開すれば $\langle g\rangle = h[g/D_x(f)]_{-1}$ と言ってもよい。）これについて，

<u>補題 2.</u> 《よい基底》$e_1,\dots,e_{h-1}$ について，$\langle e_ie_j\rangle=\delta_{i,h-j}$.

証明）$i+j\leq h$ のときは明らか（e_i は $i-1$ 次式で主係数 1 だから）。$i+j=h+k$，$k>0$ とする。$ie_i=D_x(f^{\frac{i}{h}})-[D_x(f^{\frac{i}{h}})]_-$ 等から，

$$ij\,e_ie_j = D_x(f^{\frac{i}{h}})D_x(f^{\frac{j}{h}}) - D_x(f^{\frac{i}{h}})[D_x(f^{\frac{j}{h}})]_- - [D_x(f^{\frac{i}{h}})]_-D_x(f^{\frac{j}{h}}) + [D_x(f^{\frac{i}{h}})]_-[D_x(f^{\frac{j}{h}})]_-.$$

$\langle\ \ \rangle$ をとるには，右辺の多項式部分（各項の）に注目すればよい。後の 3 項は $h-3$ 次以下。第 1 項は

$$D_x(f^{\frac{i}{h}})D_x(f^{\frac{j}{h}}) = \frac{ij}{h^2}D_x(f)^2f^{\frac{i}{h}+\frac{j}{h}-2}$$
$$=\frac{ij}{h^2}D_x(f)^2f^{\frac{k}{h}-1} = \frac{ij}{hk}D_x(f)\,D_x(f^{\frac{k}{h}})$$
$$=\frac{ij}{hk}D_x(f)[D_x(f^{\frac{k}{h}})]_+ - \frac{ij}{hk}D_x(f)[D_x(f^{\frac{k}{h}})]_-$$

この式の第1項は $D_x(f)$ の倍数、第2項は高々 $h-3$ 次だから、$D_x(f^{\frac{i}{h}})D_x(f^{\frac{j}{h}})$ の多項式部分についても〈 〉は0となる。即ち $i+j>h$ ならば $\langle e_i e_j\rangle=0$ である。□

さて、(5.1)式から、

$$h e_i f \equiv \sum_{k=1}^{h-1} a_{ik} e_k \pmod{D_x(f)}.$$

両辺に e_j を掛けて〈 〉をとると、補題2から

$$(5.2) \qquad a_{i,h-j} = h\langle e_i e_j f\rangle \qquad (1\leq i,j\leq h-1)$$

を得，右辺は i,j について対称となる。これが A の対称性(A.1)の内容である。(5.2)の右辺を補題2の証明と同様の方法で計算すると

$$a_{i,h-j} = -\frac{h}{j}\left[f^{\frac{i}{h}}\left[D_x(f^{\frac{j}{h}})\right]_-\right]_{-1} - \frac{h}{i}\left[f^{\frac{j}{h}}\left[D_x(f^{\frac{i}{h}})\right]_-\right]_{-1}$$

となる。これを書き下した式が、n°2 で掲げた表示式である。

このn°5の最後に、$\det A$ を決定しておく。まず n°4 の命題の ii) から、行列 A は $\mathbb{Q}[t,\Delta^{-1}]$ でみると可逆である。従って $\det A$ は Δ の巾を割り切る。Δ は t の多項式として既約だから、$\det A$ は Δ の巾の定数倍($\in\mathbb{Q}$)となる。そこで $\det A$ と Δ の t についての重みに注目すると、両者とも重み $h(h-1)$ なので、$\det A = c\cdot\Delta$ ($c\in\mathbb{Q}$) の形となる。c を求めるには、$f=x^h-1$ ($t_1=\cdots=t_{h-1}=0,\ t_h=-1$) について、

$\det A$ と Δ を比較すれば十分である。このとき $a_{i,h-j}$ の表示式から $A=-hI$ （I は単位行列）で $\det A=(-h)^{h-1}$. 一方 $\Delta=(-1)^{\frac{1}{2}h(h-1)+h-1}\cdot h^h$ から、$C=(-1)^{\frac{1}{2}h(h-1)}/h=(-1)^{[\frac{h}{2}]}/h$ を得る。

6. 表示(B)と両立条件. まず≪よい基底≫に対する表示(B)を確認する。k $(1\leq k\leq h)$ を1つ固定して $D_t=D_{t_k}$ と書くことにする。このとき

$$
\begin{aligned}
iD_t(e_i f^{\lambda})dx &= D_t(D_x(g_i)f^{\lambda})dx\\
&= \lambda D_x(g_i)D_t(f)f^{\lambda-1}dx + D_x(D_t(g_i))f^{\lambda}dx\\
&\equiv \lambda\left(D_x(g_i)D_t(f)-D_t(g_i)D_x(f)\right)f^{\lambda-1}dx\\
&\qquad (\mathrm{mod}\ d_x M_0)
\end{aligned}
$$

である。従って、$D_x(g_i)D_t(f)-D_t(g_i)D_x(f)$ が高々 $h-2$ 次式であることがわかれば これを $i\sum_{j=1}^{h-1} b_{ij}e_j$ と書いて $D_t\vec{u}(\lambda)=\lambda B\vec{u}(\lambda-1)$ $(B=(b_{ij}))$ の形の表示が得られることになる。

[補題 3. $D_x(g_i)D_t(f)-D_t(g_i)D_x(f)$ は高々 $h-2$ 次式。

証明） $D(g_i)=\frac{i}{h}f^{\frac{i}{h}-1}D(f)-\frac{i}{h}[f^{\frac{i}{h}-1}D(f)]_-$ の形の式を与式に代入すると

$$\frac{i}{h}[f^{\frac{i}{h}-1}D_t(f)]_-D_x(f)-\frac{i}{h}[f^{\frac{i}{h}-1}D_x(f)]_-D_t(f)$$

これが $h-2$ 次以下となることはみやすい。□

次に2つの表示

$$E(\lambda)\vec{u}(\lambda)=\lambda A\vec{u}(\lambda-1),\quad D_t\vec{u}(\lambda)=\lambda B\vec{u}(\lambda-1)$$

から、両立条件として性質(B.1)(B.2)を導く。$E(\lambda+1)\vec{u}(\lambda+1)$ を D_t で微分したものを2通りにみると、$D_t(A)\vec{u}(\lambda)+AD_t\vec{u}(\lambda)$ $=E(\lambda+1)B\vec{u}(\lambda)$. これを $\vec{u}(\lambda-1)$ で統一すると

$$D_t(A)E(\lambda)^{-1}A\vec{u}(\lambda-1)+AB\vec{u}(\lambda-1)$$
$$=E(\lambda+1)BE(\lambda)^{-1}A\vec{u}(\lambda-1)$$

$u_i(\lambda-1)$ は、$\mathbb{Q}[t,\Delta^{-1}]\otimes_{\mathbb{Q}[t]}H^1(\Omega_x^{\cdot}(M))$ の元として $\mathbb{Q}(\lambda)[t,\Delta^{-1}]$ 上の自由基底を与えるから、行列として

$$D_t(A)E(\lambda)^{-1}A+AB=E(\lambda+1)BE(\lambda)^{-1}A$$

が成立する。両辺の (i,j) 成分をとり整理すると

$$\sum_r\frac{1}{h\lambda+r}\{D_t(a_{ir})-(h+i-r)b_{ir}\}a_{rj}$$
$$+\sum_r(a_{ir}b_{rj}-b_{ir}a_{rj})=0$$

となる。$1,\ \dfrac{1}{h\lambda+r}\ (r=1,\dots,h-1)$ は $\mathbb{Q}(\lambda)[t]$ において $\mathbb{Q}[t]$ 上独立だから

$$\{D_t(a_{ir})-(h+i-r)b_{ir}\}a_{rj}=0$$
$$\sum_r(a_{ir}b_{rj}-b_{ir}a_{rj})=0.$$

を得る。A の各行に 0 でない成分があるから上の式で $\{\ \}$ が 0 となる。即ち $b_{ij}=D_t(a_{ij})/h+i-j$. 下の式は AB $=BA$. これで(B.1)(B.2)が示せた。

7. 付録. $h=2,3,4,5$ に対する《よい基底》$e_1,\dots,e_{h-1}$ と行列 A を掲げておく。但し，$h=3,4,5$ では一般多項式 f で $t_1=0$ とした形：$f=x^h+t_2x^{h-2}+\cdots+t_h$ で書いておく。

$(h=2)$ $\quad e=1,\quad A=2t_2-\frac{1}{2}t_1^2$

$(h=3)$
$$\begin{cases} e_1=1 \\ e_2=x \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} 3t_3, & 2t_2 \\ -\frac{2}{3}t_2^2, & 3t_3 \end{pmatrix}$$

$(h=4)$
$$\begin{cases} e_1=1 \\ e_2=x \\ e_3=x^2+\frac{1}{4}t_2 \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} 4t_4-\frac{1}{2}t_2^2, & 3t_3, & 2t_2 \\ -\frac{5}{4}t_2t_3, & 4t_4-t_2^2, & 3t_3 \\ \frac{1}{8}t_2^3-\frac{3}{4}t_3^2, & -\frac{5}{4}t_2t_3, & 4t_4-\frac{1}{2}t_2^2 \end{pmatrix}$$

$(h=5)$ $\quad e_1=1 \qquad e_2=x$

$\qquad e_3=x^2+\frac{1}{5}t_2 \qquad e_4=x^3+\frac{2}{5}t_2x+\frac{1}{5}t_3$

$A=(a_{ij})$ （$a_{i,h-j}=a_{j,h-i}$ に注意して補う。）

$$a_{11}=5t_5-t_2t_3,\quad a_{12}=4t_4-\frac{4}{5}t_2^2,\quad a_{13}=3t_3,\quad a_{14}=2t_2$$
$$a_{21}=-\frac{6}{5}t_2t_4-\frac{3}{5}t_3^2+\frac{6}{25}t_2^3,\quad a_{22}=5t_5-2t_2t_3,$$
$$a_{23}=4t_4-\frac{6}{5}t_2^2,\quad a_{31}=-\frac{7}{5}t_3t_4+\frac{14}{25}t_2^2t_3$$
$$a_{32}=-\frac{6}{5}t_2t_4-\frac{6}{5}t_3^2+\frac{8}{25}t_2^3$$
$$a_{41}=-\frac{4}{5}t_4^2+\frac{8}{25}t_2^2t_4+\frac{8}{25}t_2t_3^2-\frac{6}{125}t_2^3$$

—— * ——

文献

[1] Bernstein, I.N. : The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter, Funct. Analysis and its Appl., 6(4) 1972, 26-40.

[2] Pham, F. : Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin, Birkhäuser, 1979.

[3] Saito, K., Yano, T. and Sekiguchi, J. : On a certain generator system of the ring of invariants of a finite reflection group, Comm. in algebra, 8(4) 1980, 373-408.

[4] Yano, T. : Free deformations of isolated singularities, Science Report of the Saitama Univ., Ser A, Vol. IX, No. 3, 1980, 61-70.